

BAREM clasa a VIII-a

1. $(A'B'C') \cap (ABC) = CD$ unde $\{D\} = A'B' \cap AB$ 2 puncte
 $CB = \frac{AD}{2}$ implică $m(\angle ACD) = 90^\circ$ 2 puncte
 $A'C \perp CD$ 2 puncte
 $m(\angle[(A'B'C); (ABC)]) = m(\angle A'CA) = 45^\circ$ 1 punct
2. a) $f: M \rightarrow M$, $f(x) = x$ are proprietatea \mathcal{P} 1 punct
b) Dacă $a > 0$ și f are \mathcal{P} rezultă $a = 1$, $b = 0$, deci $f(x) = x$ 1 punct
O a doua funcție apare eventual dacă $a < 0$ 1 punct
c) Presupunem $M = \{x_1, \dots, x_{2003}\}$ cu $x_1 < \dots < x_{2003}$. $f_1(x) = x$ are \mathcal{P} și presupunem $f_2(x) = ax + b$ are \mathcal{P} 1 punct
Suma elementelor din M este $S = x_1 + \dots + x_{2003}$ și totodată $S = a(x_1 + \dots + x_{2003}) + 2003b$.
Rezultă $(x_1 + \dots + x_{2003})(1 - a) = 2003b$, adică $b = 0$ 1 punct
 $f_2(x) = ax$ și $a < 0$ implică $f_2(x_1) = x_{2003}$ și $f_2(x_{2003}) = x_1$, de unde $a(x_1 + x_{2003}) = x_1 + x_{2003}$,
deci $x_{2003} = -x_1$ 1 punct
Analog $f(x) = -x$ oricare $x \in M$. Rezultă M simetrică și cum are un număr impar de
elemente $0 \in M$ 1 punct
3. Pe fiecare coloană sau linie există exact un ± 5 1 punct
Valorile ± 5 pot fi plasate în $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot 2^n$ moduri (câte un singur astfel de număr pe
fiecare linie sau coloană) 2 puncte
Restul căsuțelor vor fi completate cu ± 1 în 2^{n^2-n} moduri 3 puncte
În total $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot 2^n$ moduri de completare 1 punct
4. a) Prin reducere la absurd: $m(\angle MPN) \geq m(\angle MNP) > 60^\circ$ și
 $m(\angle PMN) \geq m(\angle MNP) > 60^\circ$ 2 puncte
 $180^\circ = m(\angle MPN) + m(\angle MNP) + m(\angle PMN) > 180^\circ$, contradicție 1 punct
b) Fie $m(\angle VAB) = \alpha$; pentru a arăta că $\alpha = 60^\circ$, ceea ce rezolvă problema, procedăm prin
reducere la absurd:
Dacă $\alpha > 60^\circ$ avem $VB > VA$ din triunghiul VAB conform a). Avem și $VC < VA$ în triunghiul
 VAC . În triunghiul VBC , cum $VC < BC$, vom avea neapărat $VC > VB$, contradicție 3 puncte
Cazul $\alpha < 60^\circ$ tratat analog cu reformularea punctului a) corespunzător 1 punct